CHUYÊN ĐỀ 12: BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1. Kiến thức cơ bản:

Phương pháp 1: Tiên đề Ơ'clit: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng song song với a.

Hệ quả: Qua một điểm A nằm ngoài đường thẳng a kẻ được duy nhất một đường thẳng vuông góc với a.

Phương pháp 2: Chứng minh qua một điểm có hai đường thẳng vuông góc với 1 đường thẳng cho trước tại điểm đó.

Phương pháp 3: Chứng minh tổng hai góc bằng 180^0 (sử dụng tứ giác nội tiếp, các góc bằng nhau...).

Phương pháp 4: Sử dụng tính chất đồng quy của ba đường cao, phân giác, trung trực, trung tuyến...

Phương pháp 5: Chứng minh điểm AM + MB = AB thì A thuộc đoạn thẳng BC. Suy ra A, B, C thẳng hàng.

Phương pháp 7: Dùng tính chất đường trung trực: Chứng minh các điểm cách đều hai đầu mút của một đoạn thẳng cho trước thì đều nằm trên một đường thẳng.

Phương pháp 8: Dùng tính chất tia phân giác: Chứng minh 3 điểm đó cùng cách đều hai cạnh của một góc.

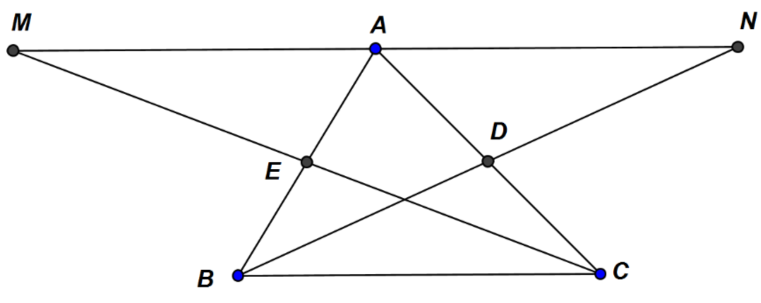
Phương pháp 9: Sử dụng tính chất đường chéo của các tứ giác đặc biệt.

Phương pháp 10: Sử dụng tính chất đường kính và dây cung của đường tròn.

Phương pháp 11: Sử dụng tính chất hai đường tròn tiếp xúc nhau. Đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường trong và tiếp tuyến chung thì vuông góc với nhau.

2. Bài tập áp dụng:

Bài tập 1: Cho Δ ABC với hai trung tuyến BD và CE. Gọi M và N theo thứ tự thuộc các tia đối của các tia EC và DB sao cho EC = EM và DB = DN. Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng.



Giải

Tứ giác AMBC có:

EA = EB,

EM = EC (gt)

Nên là hình bình hành.

Suy ra: AM // BC (1)

Chứng minh tương tự, ta có:

AN // BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng (tiên đề Ơcơlit).

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật ABCD (AB < CD), có O là giao điểm của hai đường chéo. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho CE = CD. Gọi F là hình chiếu của của D trên BE; I là giao điểm của AB và CF; K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng ba điểm O, K, I thẳng hàng.

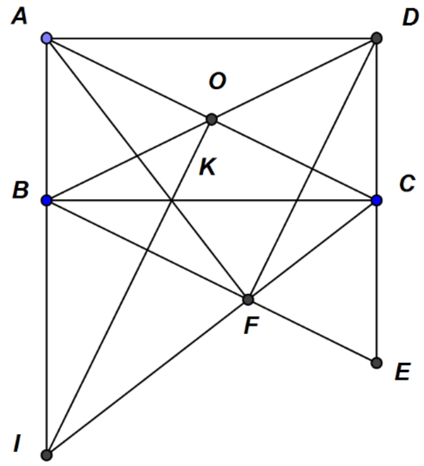
Giải

ABCD là hình chữ nhật nên:

AB = CD, AC = BD và OA = OB = OC = OD.

Ta có CB $\perp$ AI (vì ABCD là hình chữ nhật)

Suy ra CB là đường cao của Δ CAI (1)



Δ FBD vuông tại F (vì F là hình chiếu của D lên BE) có:

FO là trung tuyến ứng với cạnh huyền BD nên $OF=\frac{1}{2}BD$

Suy ra $OF=\frac{1}{2}AC$

Δ FAC có FO là đường trung tuyến ứng với cạnh AC.

Mà $OF=\frac{1}{2}AC$ nên Δ FAC vuông tại F.

Suy ra AF $\perp$ CI hay AF là đường cao của Δ CAI. (2)

K là giao điểm của AF và CB nên từ (1) và (2), suy ra K là trực tâm của Δ CAI.

Do đó IK $\perp$ AC (3)

Mặt khác, tứ giác ABEC có:

AB = CE (cùng bằng CD) và AB // CE (vì AB // CD) nên là hình bình hành

Suy ra BE // AC suy ra BF // AC suy ra ABFC là hình thang.

Lại có Δ FDE vuông tại F, FC là trung tuyến ứng với cạnh DE (vì CD = CE) nên CF = CD suy ra CF = AB (vì AB = CD).

Suy ra Δ BAC = Δ FCA (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

Suy ra AF = BC.

Hình thang ABFC có hai đường chéo AF và BC bằng nhau nên là hình thang cân.

Suy ra: $IAC = ICA \Rightarrow \Delta IAC$ cân tại I

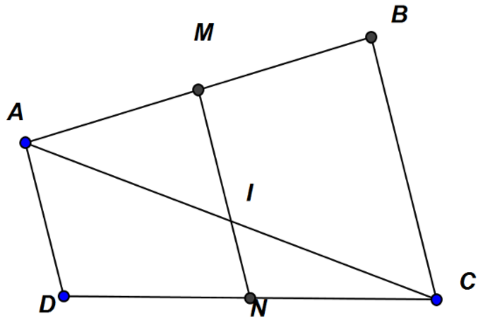
Suy ra IO là trung tuyến đồng thời là đường cao.

Hay IO $\perp$ AC (4)

Từ (3) và (4) suy ra I, K, O thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, I và N theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và CD. Chứng minh rằng nếu $MN = \frac{AD + BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Giải



Giả sử: $MN = \frac{AD + BC}{2}$

Vì MA = MB, IA = IC nên MI là đường trung bình của tam giác ABC.

Suy ra: MI // BC và $MI = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh tương tự ta có: IN // AD và $IN = \frac{1}{2}AD$

Mà $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$ hay MN = MI + IN.

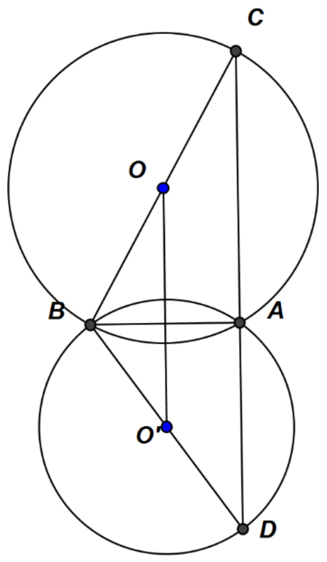
Từ đó suy ra I nằm giữa M và N, hay M, I, N thẳng hàng.

Lúc đó, ta có: BC // AD vì cùng song song với MN.

Do đó ABCD trở thành hình thang.

Vậy nếu $MN = \frac{AD + BC}{2}$ thì M, I, N thẳng hàng và ABCD trở thành hình thang.

Bài tập 4: Đường tròn tâm O và đường tròn tâm O’ cắt nhau tại A và B.



Gọi C, D lần lượt đối xứng với B qua O và O’. Chứng minh rằng C, A, D thẳng hàng.

Giải

Vì C đối xứng với B qua O nên O là trung điểm của BC. Suy ra BC là

đường kính của (O). Ta có OA = OB = OC = $\frac{1}{2}BC$ nên

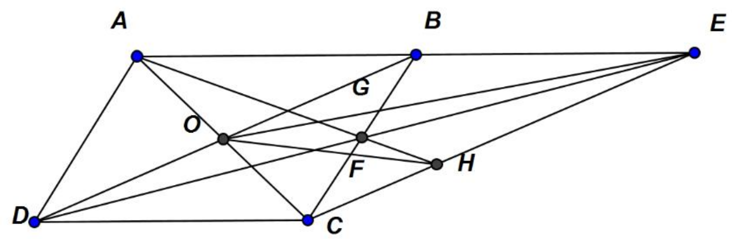
tam giác ABC vuông tại A

Suy ra $BAC = 90^0$

Chứng minh tương tự ta có: $BAD = 90^0$.

Do đó C, A, D thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo; E là điểm đối xứng của A qua B; F là giao điểm của BC và ED; G là giao điểm của BC và OE; H là giao điểm của EC và OF. Chứng minh rằng A, G, H thẳng hàng.



Giải

Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên OA = OC

suy ra EO là trung tuyến của Δ EAC.

E đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của EA.

Suy ra CB là trung tuyến của Δ EAC.

G là giao điểm của CB và EO nên G là trọng tâm của Δ EAC (1)

Mặt khác, ABCD là hình bình hành nên CD // AB, CD = AB

Mà B là trung điểm của AE nên suy ra CD // BE, CD = BE.

Do đó tứ giác BECD là hình bình hành.

Từ đó F là trung điểm của hai đường chéo ED và BC của hình bình hành BECD.

Ta có OF là đường trung bình của Δ CAB nên OF // AB suy ra OH // AE suy ra HE = HC.

Do đó AH là trung tuyến của Δ EAC (2)

Từ (1) và (2) suy ra A, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 6: Cho hình bình hành ABCD. Trên đường chéo BD lấy hai điểm E và F sao cho BE = DF. Kẻ EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD (H $\in$ AB, K $\in$ CD). Gọi O là trung điểm của EF. Chứng minh rằng ba điểm H, O, K thẳng hàng.

Giải

Vì EH $\perp$ AB, FK $\perp$ CD và AB // CD nên EH // FK (1)

Xét Δ HBE và Δ KDF có BE = DF, $KDF = HBE, DKF = BHE = 90^0$

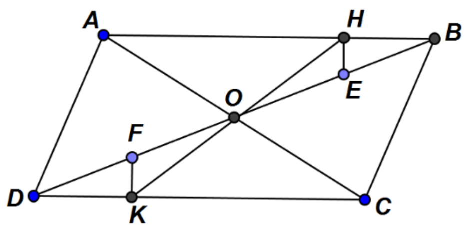
Suy ra Δ HBE = Δ KDF (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra HE = KF (2)

Từ (1) và (2) suy ra HEKF là hình bình hành

Suy ra trung điểm của EF cũng là trung điểm của HK.

Vậy E, H, K thẳng hàng (đpcm).



Bài tập 7: Cho tứ giác ABCD. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N. Gọi I, J, K theo thứ tự là trung điểm của BD, AC, MN. Chứng minh rằng I, J, K thẳng hàng.

Giải

Gọi K’ là giao điểm của IJ với MN.

Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ N, M tới đường thẳng IJ.

Dễ thấy M, N nằm về hai phía của IJ.

Ta có : $S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NDI} - S_{NJC} - S_{NCI} - S_{CID}$

$$S_{NIJ} = S_{NDC} - \frac{1}{2}S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{NAC} - \frac{1}{2}S_{AIC} - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

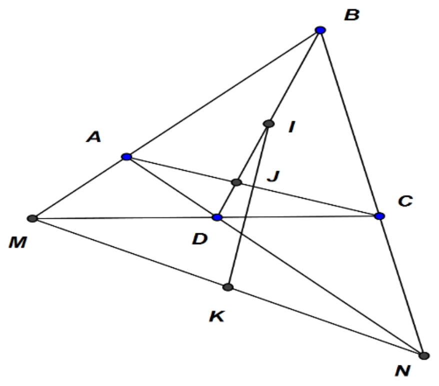
$$S_{NIJ} = S_{NDC} - S_{NBD} - \frac{1}{2}S_{ABD} - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}\left(S_{ADC} - S_{ADIC}\right) - \frac{1}{2}S_{CBD}$$

$$S_{NIJ} = S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABD} - S_{BCD}\right) + \frac{1}{2}S_{ABCD} - \frac{1}{2}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$$

Chứng minh tương tự ta có: $S_{MIJ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$

Do đó $S_{NIJ} = S_{MJI}$ hay

$\frac{1}{2}NF.IJ = \frac{1}{2}ME.IJ \Rightarrow ME = NF \Rightarrow S_{NKJ} = S_{MKJ}$



Hai Δ NKJ và Δ MKJ có chung chiều cao hạ từ J.

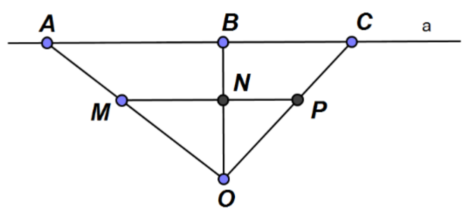
Suy ra: NK’ = MK’.

Mà MK = NK (giả thiết) nên K $\equiv$ K’.

Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 8: Ba điểm A, B, C cùng thuộc đường thẳng a, điểm O không thuộc a. Chứng minh rằng nếu ba điểm M, N, P thỏa mãn hệ thức OM

$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{OP}{OC}$ thì M, N, P thẳng hàng.



Giải

Thật vậy, theo định lí Talet đảo thì từ $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

Suy ra: MN // AB.

Tương tự MP // AC.

Nhưng A, B, C thẳng hàng nên M, N, P thẳng hàng (tiên đề Ơcơlit).

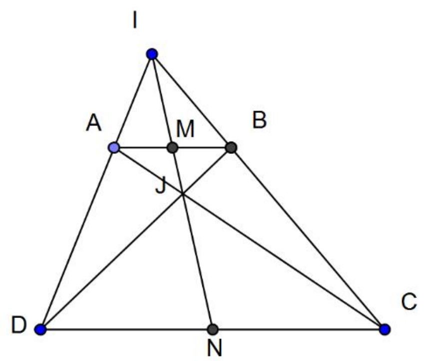
Bài tập 9 (Bổ đề hình thang): Trong hình thang có hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy nằm trên cùng một đường thẳng.

Giải

Giả sử hình thang đã cho là ABCD (AB // CD, AB < CD) có I, J

tương ứng là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh và của

hai đường chéo.



Gọi M và N lần lượt là giao điểm của IJ với AB và CD.

Do AB // CD nên áp dụng hệ quả của định lí Talet ta có:

$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}\left(= \frac{IM}{IN}\right)$ và $\frac{AM}{CN} = \frac{BM}{DN}\left(= \frac{JM}{JN}\right)$ hay

$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN}\left(= \frac{IM}{IN}\right)$

Bài tập 10: Trên mặt phẳng cho n điểm (n > 3) và bất kì đường thẳng nào đi qua hai trong những điểm đó đều chứa một điểm đã cho. Chứng minh rằng tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên một đường thẳng.

Giải

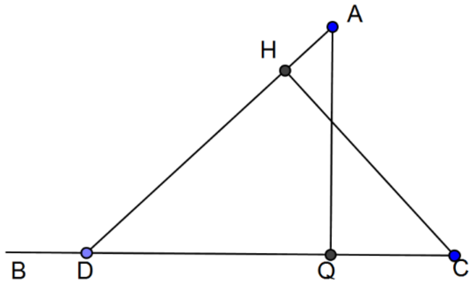
Giả sử tất cả các điểm không cùng nằm trên một đường thẳng. Qua mỗi cặp điểm đã cho vẽ một đường thẳng (có một số hữu hạn đường này) và chọn khoảng cách khác 0 từ các điểm đã cho đến các đường thẳng này.

Giả sử khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC, trong đó

A, B, C là các điểm đã cho là khoảng cách nhỏ nhất.

Trên đường thẳng BC còn có một điểm D nào đó.

Từ A kẻ AQ vuông góc với BC tại Q.



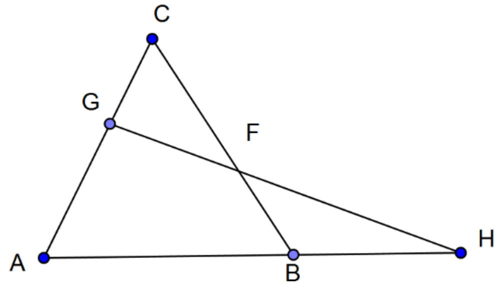
Hai trong các điểm B, C, D nằm cùng một phía đối với điểm Q, chẳng hạn C và D như hình vẽ, khi đó ta có CQ < DQ.

Hạ CH vuông góc với AD tại H.

Dễ thấy CH < AQ. Điều này mâu thuẫn với việc chọn điểm A và đường thẳng BC.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài tập 11 (Định lý MENELAUS): Là một định lý về các tam giác trong hình học phẳng. Cho tam giác ABC. Các điểm H, F, G lần lượt nằm trên AB, BC, CA. Khi đó: G, H, F thẳng hàng khi và chỉ khi: $\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}=-1$



Chứng minh

Phần thuận:

Sử dụng định lý sin trong các tam giác AGH , BFH, CGF, ta được:

$$\frac{AH}{GA}=\frac{\sin AGH}{\sin AHG};\frac{BF}{HB}=\frac{\sin BHF}{\sin HFB};\frac{CG}{FC}=\frac{\sin GFC}{\sin CGF};$$

(với lưu ý rằng $\sin AGH=\sin CGF;\sin AHG=\sin BHF;\sin HFB=\sin GFC$)

Nhân từng vế ta được điều phải chứng minh .

Phần đảo:

Gọi $F'=GH\cap BC$

Tương tự ta có được:

$$\frac{AH}{HB}.\frac{BF'}{F'C}.\frac{CG}{GA}=\frac{AH}{HB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CG}{GA}(=-1).$$

Hay $\frac{BF'}{F'C}=\frac{BF}{FC'}$ suy ra $F\equiv F'$

Bài tập 1: Cho ΔABC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C dựng hình vuông ABDE ; trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B dựng hình vuông ACMN. Dựng hình bình hành AEIG. Gọi K là giao điểm của CD và BM. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, K, H thẳng hàng.

Bài tập 2: Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD ta lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho AM = BN = CP = DQ. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng M, O, P thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho góc vuông xAy. Một điểm B cố định trên Ax, còn một điểm C chuyển động trên Ay. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C chuyển động trên Ay.

Bài tập 4: Trong hình vuông ABCD lấy điểm E sao cho $EBC=ECB=15^0$. Trên nửa mặt phẳng bờ CD không chứa điểm E vẽ tam giác đều CDF. Chứng minh rằng B, E, F thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB. Đường thẳng kẻ từ C song song với AD cắt BD và AB lần lượt tại E và F. Đường thẳng kẻ từ D song song với BC cắt AC và AB lần lượt tại P và Q.

Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

Bài tập 6:Trên một đường thẳng lấy bốn điểm theo thứ tự là A, E, F, B. Dựng các hình vuông ABCD, EFGH sao cho chúng nằm cùng ở một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đã cho. Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng :

a) C, O, E thẳng hàng.

b) D, O, F thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E. Lấy điểm F điểm đối xứng với C qua E. Từ điểm F kẻ Fx và Fy lần lượt song song với AD và AB. Gọi I là giao điểm của Fx và AB ; K là giao điểm của FI và AD. Chứng minh rằng I, K, E thẳng hàng.

Bài tập 8: Cho ΔABC vuông tại A, cạnh huyền BC = 2AB. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $ABD = \frac{1}{3}ABC$; trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $ACE = \frac{1}{3}ACB$. Gọi F là giao điểm của BD và CE; G và H theo thứ tự là các điểm đối xứng của F qua các cạnh BC và AC. Chứng minh rằng:

a) Ba điểm H, D, G thẳng hàng.

b) Tam giác EDF cân.

Bài tập 9: Cho góc vuông xOy tam giác. M thuộc Ox; A, B thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP với MB; K là giao điểm của AM với BP; I, K, E lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng minh rằng I, E, N thẳng hàng.

Bài tập 10: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông xEy quay quanh đỉnh E có cạnh Ex cắt FG và GH theo thứ tự tại M và N, còn cạnh Ey cắt các đường FG và GH theo thứ tự tạ P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng bốn điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 11: Cho tứ giác ABCD và một điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho các tam giác ABO, BCO, CDO, DAO có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng hoặc ba điểm A, O, C thẳng hàng, hoặc ba điểm B, O, D thẳng hàng.

Bài tập 12: Cho Δ ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD và CE. Gọi I là điểm thuộc đoạn BC; H là giao điểm của BD và CE; N thuộc đoạn AH ; M thuộc đoạn DE. Chứng minh rằng M, I, N thẳng hàng.

Bài tập 13: Cho hình vuông EFGH. Một góc vuông Exy quay quanh đỉnh E. Cạnh Ex cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự tại M và N; cạnh Ey cắt các đường thẳng FG và GH theo thứ tự ở P và Q. Gọi I và K theo thứ tự là trung điểm của PN và QM. Chứng minh rằng 4 điểm F, H, K, I thẳng hàng.

Bài tập 14: Cho $\widehat{xOy} = 90^0$. Lấy điểm M thuộc Ox, A và B cùng thuộc Oy. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt đường thẳng đi qua B và vuông góc với BM tại P. Gọi H là giao điểm của AP và MB; K là giao điểm của AM và BP; I, E, N lần lượt là trung điểm của MP, AB và KH. Chứng

minh rằng I, E, N thẳng hàng.